

## Die Eulersche Zahl e in der Praxis

Woher kommt die berühmte Zahl e und was hat sie mit Lade- und Entladevorgängen, dem radioaktiven Zerfall oder dem Luftdruck zu tun?

### e-Erkenntnisse

Betrachten wir zunächst das Wachstum von Kapital an einem Beispiel: Ein Kapital a, das mit jährlich 5 % verzinst wird, hat sich nach 20 Jahren verdoppelt, wenn die gesamten Zinsen in einer Zahlung am Ende der Laufzeit zugeschlagen werden.

Der Zinsfuß kann durchaus für ein Jahr angegeben werden, auch wenn die Zahlungen in ganz anderen Zeiträumen erfolgen.

Werden die Zinsen in 2 Zahlungen zugeschlagen, ist der Wachstumsfaktor für die erste Hälfte des Zeitraums  $(1 + 1/2)$  und für die zweite Hälfte ebenso. Also wächst das Kapital im ganzen Zeitraum um den Faktor  $(1 + \frac{1}{2})^2$  und entsprechend bei n Zahlungen um den

Faktor  $(1 + \frac{1}{n})^n$ . Sind beispielsweise 1000 Zinszahlungen in 20 Jahren vorgesehen, ergibt

sich ein Kapital von  $a = a_0(1 + \frac{1}{1000})^{1000} = a_0 \cdot 2,716\dots$ . Der Faktor, mit dem das Kapital

wächst, nähert sich mit zunehmender Anzahl Zahlungen einem Grenzwert, der erst bei unendlich vielen Zahlungen erreicht wird. Dieser Grenzwert ist die Eulersche Zahl  $e = 2,7182\dots$ . Als irrationale Zahl hat sie unendlich viele Nachkommastellen ohne Periode.

In einer mathematischen Formel ausgedrückt:  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Grenzwerte werden durch den Ausdruck  $\lim$  (limes) bezeichnet, da man n in der Formel nicht einfach durch das Zeichen für Unendlich ersetzen darf. In der Mathematik gibt es für die Zahl e auch noch andere Darstellungen. Sie kommt nicht nur bei Wachstum oder Schrumpfung vor, sondern auch in der Statistik.

Bleiben wir beim (utopischen) kontinuierlichen Wachstum des Kapitals. Es wächst in 20 Jahren um den Faktor e, in 40 Jahren um den Faktor  $e^2$  und in 10 Jahren um den Faktor  $e^{0,5}$ . Das wird durch die Funktion  $a = a_0 \cdot e^x$  ausgedrückt. Der Exponent x ist die Anzahl der „Ver-e-fachungen“. Nicht das Kapital, sondern die (reelle) Zahl der Multiplikationen mit e, also x, ist der Zeit proportional.

Die Zeit kommt ins Spiel, wenn man  $x$  als Produkt  $K \cdot t$  schreibt, wobei  $K$  die Anzahl der  $e$ -Multiplikationen in der Zeiteinheit ist und  $t$  die Zeit, also  $a = a_0 \cdot e^{K \cdot t}$ . Da bei unserem Beispiel nach 20 Jahren  $x$  gleich 1 ist, ergibt sich  $K = \frac{1}{20} [a^{-1}]$ . Keinesfalls darf man  $K$  als jährliches Wachstum von 5 % ansehen, denn das beträgt:  $e^{\frac{1}{20}} = 1.05127...$ , also 5,127...%.

Die  $e$ -Funktion gilt auch für ein Kapital, von dem kontinuierlich kleinste Beträge weggenommen werden. Das Kapital des Beispiels wäre nach 20 Jahren auf den  $e$ -ten Teil zusammengeschnitten.

Ausgedrückt wird das durch:  $K = -\frac{1}{20} [a^{-1}]$ , also durch einen negativen Exponenten von  $e$ .

Der übliche Zinseszins für das Beispiel  
Bei 20 Zahlungen erfolgt jährlich eine, was die gängige Praxis ist. Das Kapital beträgt dann  
 $a * (1 + 1/20)^{20} = a * 2.65...$   
Mit  $a * (1 + 5/100)^{20}$  taucht der oben angenommene Zinsfuß wieder auf. Nichts hindert daran, das Kapital mit dem Zinsfuß  $p$  für  $n$  Jahre zu errechnen, wodurch die bekannte Zinseszinsformel entsteht:  
 $a * (1 + p/100)^n$ .

Die praktische Bedeutung der Zahl  $e$  liegt darin, dass sie als Basis in Exponentialfunktionen auftritt, durch die viele Wachstums- und Schrumpfungsvorgänge der realen Welt beschrieben werden. Um  $e$ -Funktionen sehr einfach logarithmieren zu können, gibt es den Logarithmus zur Basis  $e$  (natürlicher Logarithmus  $\ln$ ), wie  $\ln(e^x) = x * \ln(e) = x$  zeigt.

Die Vorgänge, die nach einer  $e$ -Funktion verlaufen, müssen alle ein bestimmtes Verhalten haben. Um es zu finden, werden die „mikroskopisch“ kleinen Beträge  $\Delta a$  betrachtet, um die sich das Kapital  $a$  des vorherigen Beispiels in entsprechend kleinen Zeitintervallen  $\Delta t$  verändert. (Mit dem Zeichen  $\Delta$  (Delta) wird die Veränderung von Größen bezeichnet, z.B.  $\Delta a = a_{\text{nachher}} - a_{\text{vorher}}$ ) Auch in beliebig kleinen Zeiträumen verzinst sich das Kapital  $a$  mit  $K = 1/20$  je Jahr und wächst daher um  $\Delta a = a \cdot K \cdot \Delta t$ .

Entscheidend ist, dass die mikroskopisch kleine Veränderung des Kapitals  $\Delta a$  seiner momentanen Höhe  $a$  mit dem Faktor  $K$  proportional ist.

Wachstums- und Schrumpfungsvorgänge lassen sich dann mit einer  $e$ -Funktion beschreiben, wenn die mikroskopisch kleinen Beträge, um die sich die betreffende Größe in entsprechend kleinen Intervallen verändert, dieser Größe proportional sind.

## Kondensator und Spule

Beim Laden eines Kondensators vermindert sich mit fortschreitender Zeit der Strom  $I$  und beim Aufbau des magnetischen Flusses vermindert sich die an der Spule anliegende Spannung  $U_L$ .

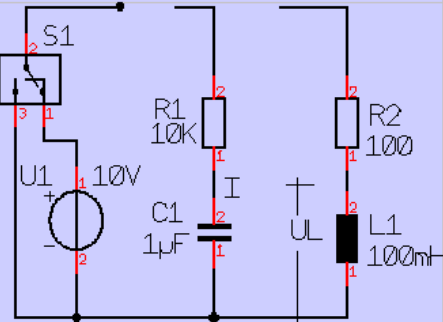
In beiden Schaltungen gilt, dass eine kleine Veränderung der Spannung  $\Delta U_C$  bzw.  $\Delta U_L$  eine gleich große aber entgegengesetzte Veränderung der Spannung  $\Delta U_R$  zur Folge hat, also  $\Delta U_R = R \Delta I = -\Delta U_C$  beim Kondensator und bei der Spule  $\Delta U_R = R \Delta I = -\Delta U_L$ .

Zur Erinnerung: Die Kapazität eines Kondensators ist die Ladung, die er mit einer Spannung von 1 Volt aufnehmen kann, also  $C = Q / U$ . Die Induktivität einer Spule ist der magnetische Fluss, den sie mit einem Strom von 1 A erzeugen kann, also  $L = \Phi / I$ . Ladung ist Strom, der über die Zeit angesammelt wurde, also  $Q = I * t$ , Entsprechend kann man sich magnetischen Fluss als angesammelte Spannung vorstellen, also  $\Phi = U * t$

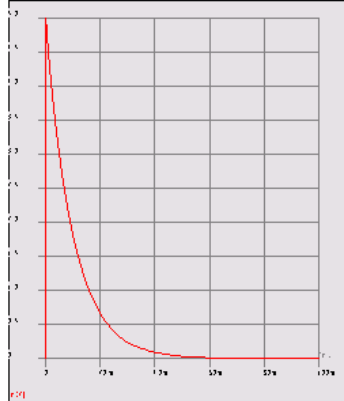
Beim Kondensator interessiert  $\Delta I$  und mit  $U = Q / C$  sowie  $Q = I * t$

ergibt sich:  $\Delta I = = \frac{-\Delta U_C}{R} = -\frac{\Delta Q}{RC} = -\frac{I \Delta t}{RC}$

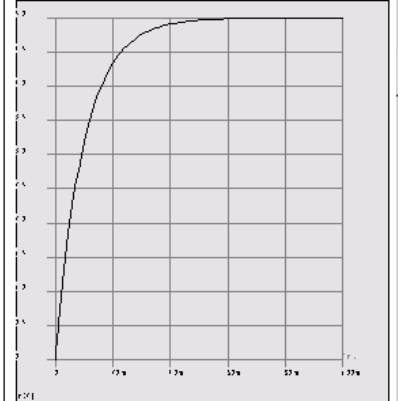
Abklingen des Stroms im  
Kondensatorkreis bzw. der  
Spannung an der Spule  
Dargest. Zeitraum: 100 ms  
Beide Zeitkonstanten: 10 ms



Laden von:  
Kondensator 1mA bis 0  
oder Spule 10V bis 0



Entladen von:  
Kondensator -1mA bis 0  
oder Spule -10V bis 0



Man sieht, dass die kleine Stromveränderung  $\Delta I$  dem fließenden Strom  $I$  mit dem Faktor  $K = -\frac{1}{RC}$  proportional ist. Damit lässt sich dem zeitlichen Verlauf des Stromes beim Laden des Kondensators in Analogie zu einer kontinuierlich verminderten Menge die Funktion  $I = I_{max} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$  zuschreiben.

Dagegen muss bei der Induktivität das Augenmerk auf die Spannungsveränderung  $\Delta U_L$  gelegt werden und mit  $I = \Phi / L$  sowie  $\Phi = U \cdot t$  gilt:

$$\Delta U_L = -\Delta I \cdot R = -\frac{\Delta \Phi}{L} \cdot R = -\frac{U_L \Delta t}{L} \cdot R$$

Jetzt ist die kleine Spannungsveränderung  $\Delta U_L$  der Spannung  $U_L$  mit dem Faktor

$K = -\frac{R}{L}$  proportional. Der zeitliche Verlauf der Spannung hat daher, ganz analog zum

Kondensator, die Funktion:  $U_L = U_{max} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

Bei Entladevorgängen gilt das gleiche mit umgekehrtem Vorzeichen, denn dabei ist die treibende Kraft die Spannung  $U_C$  bzw.  $U_L$ , weshalb sie der Spannung  $U_R$  entgegenwirkt und aus diesem Grund negativ anzusetzen ist.

Bei der Kondensatorschaltung ist das Produkt  $RC = \tau$  (tau) die Zeitkonstante. Sie gibt an, in wieviel Sekunden der Strom auf den  $e$ . Teil abgesunken ist. Praktisch ist der

Ladevorgang nach  $5\tau$  beendet.

Entsprechend ist bei der Induktivität der Quotient  $L/R$  die Zeitkonstante.

Es ist wirklich so: Wenn man einen Widerstand mit einer Kapazität multipliziert oder eine Induktivität durch einen Widerstand dividiert, kommt eine Zeit in Sekunden heraus, also  $1 \Omega \cdot 1 F = 1 s$  bzw.  $1H / 1\Omega = 1 s$

Für die Praxis interessanter ist der zeitliche Verlauf der Spannungen an den Bauteilen, der

leicht abzuleiten ist:

	Widerstand	Kondensator	Induktivität
Kondensator	$U_R = U_{max} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$	$U_C = U_{max} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$	-----
Induktivität	$U_R = U_{max} \cdot (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$	-----	$U_L = U_{max} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$

## Radioaktiver Zerfall

Es ist offensichtlich, dass beim radioaktiven Zerfall der Verlust an Teilchen in unendlich kleinen Zeitintervallen der vorhandenen Teilchenmenge proportional ist. Daher gilt für den Vorgang genau wie für das Dahinschmelzen von Kapital die Gleichung  $a = a_0 \cdot e^{-Kt}$

Der Zerfall ist durch nichts zu beeinflussen. Also gibt es keine Parameter. Die Gleichung wird deshalb dazu verwendet, aus den Daten eines Experiments die Konstante K zu bestimmen, die Zerfallskonstante genannt wird. Sie ist für die jeweilige radioaktive Substanz typisch.

Bei Jod 131 ist die Zerfallskonstante  $0,000001 \text{ s}^{-1}$ . Auch hier darf der Wert nicht als Verschwinden des millionsten Teils in jeder Sekunde interpretiert werden, sondern als Verminderung der Teilchenmenge in 1000000 s auf den e. Teil.

Die Zeit, in der sich die Menge auf die Hälfte vermindert hat, wird Halbwertszeit  $T_h$  genannt. Sie ist eine aussagekräftigere Variante der Zerfallskonstanten. Man erhält mit

$$a_0 / 2 = a_0 \cdot e^{-K T_h} \quad \text{die Halbwertszeit } T_h = 0,693 / K \quad . \quad \text{Für Jod 131 ist}$$

$$T_h = 0,693 / 10^{-6} \text{ s}^{-1} = 693000 \text{ s} = 8,02 \text{ d} \quad , \text{ also etwa 8 Tage.}$$

## Luftdruck und Höhe

Das Verhältnis von Druck p zu spezifischem Gewicht  $\gamma$  (gamma) der Luft ist bei jeder Höhe gleich, konstante Temperatur vorausgesetzt. Für die Höhe 0 und eine beliebige andere

Höhe gilt  $\frac{p_0}{\gamma_0} = \frac{p}{\gamma}$  also auch  $\gamma = \frac{p \cdot \gamma_0}{p_0}$ . Die Druckabnahme  $-\Delta p$  beträgt für eine Höhenzunahme  $\Delta h$ , die so klein ist, dass  $\gamma$  als konstant angesehen werden kann

$$-\Delta p = \gamma \cdot \Delta h \quad \text{und damit} \quad -\Delta p = p \cdot \frac{\gamma_0}{p_0} \Delta h \quad . \quad \text{Man sieht, dass Druck p und}$$

Druckveränderung  $\Delta p$  mit dem Faktor  $-\gamma_0/p_0$  proportional sind. In Analogie zum schwindenden Kapital kann daher die Abhängigkeit des Luftdrucks p von der Höhe h durch die e-Funktion  $p = p_0 \cdot e^{-\frac{\gamma_0}{p_0} h}$  beschrieben werden.

Das Beispiel zeigt auch, dass es nicht immer die Zeit ist, die im Exponent von e erscheint.

## Diskussion

Natürlich wäre es mathematisch korrekt, bei den Beispielen den Schritt hin zur e-Funktion durch Integrieren zu vollziehen, ein Verfahren der höheren Mathematik. Aber der Weg über das Kapitalwachstum und die Analogie dazu erzeugt die beabsichtigte Anschauung.

Bleibt die Frage, weshalb beim Kapitalwachstum die e-Funktion ohne Integrieren und auch

---

ohne Analogien gefunden werden kann. Nun, zum einen ist der Zusammenhang zwischen Betrag und Zuwachs so einfach, dass er nicht aus mikroskopischen Veränderungen hergeleitet werden muss, und zum anderen ist es leicht möglich, den Vorgang in diskreten Schritten (Zinszahlungen) zu betrachten.

## Literatur / Links

Das große Werkbuch Elektronik, Dieter Nührmann, Franzis-Verlag

[http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche\\_Zahl](http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl)